УРОК 1

Тема уроку: Поняття похідної. Задачі, що приводять до поняття похідної. Таблиця похідних

Підручник з математики для 10-ого класу § 3 п.18 та п.19

Поняття похідної — фундаментальне поняття математичного аналізу, за допомогою якого досліджують процеси і явища в природничих, соціальних і економічних науках. Вивчення різних процесів (механічного руху, хімічних реакцій, розширення рідини при нагріванні, значення електричного струму та ін.) приводять до необхідності обчислення *швидкості зміни різних величин*, тобто до поняття похідної. Отже, наша найближча мета — познайомитися з поняттям похідної, навчитися знаходити похідні елементарних функцій та застосовувати поняття похідної до дослідження функцій, вивчення деяких фізичних явищ, до вивчення геометричних понять.

Розглянемо дві задачі, що приводять нас до поняття похідної. Це задача на знаходження миттєвої швидкості ЗАДАЧА 1 та задача на знаходження кутового коефіцієнта дотичної ЗАДАЧА 2. Перейдіть за посиланнями та ознайомтеся з цими задачами.

Ці дві задачі розв'язуються одним і тим самим способом, який складається з таких етапів:

1) незалежній змінній x надаємо приросту Δx;

2) знаходимо приріст залежної змінної — Δy;

3) знаходимо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

4) знаходимо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ використовується при розв’язуванні і інших важливих задач (зокрема, про швидкість протікання хімічних реакцій, знаходження густини неоднорідного стержня, теплоємності тіла при нагріванні, сили змінного струму в провіднику та інш.), тому доцільно всебічно вивчити властивості цієї границі, зокрема, вказати способи її обчислення.

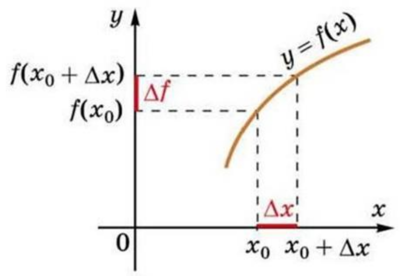
Нехай задано функцію $y = f(x)$ на деякому проміжку. Візьмемо довільну внутрішню точку x_o даного проміжку, надамо значенню x_o довільного приросту Δx (число Δx може бути як додатним, так і від'ємним), але такого, щоб точка $x_o+\Delta x$ належала даному проміжку, тоді

1) Обчислимо в точці x_o приріст $\Delta y = \Delta f(x_o)$ функції:

$$\Delta y = \Delta f(x_o) = f(x_o + \Delta x) - f(x_o);$$

2) Складемо відношення:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$



3) Знайдемо границю цього відношення при умові, що $\Delta x \to 0$, тобто:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Якщо дана границя існує, то її називають похідною функції $y = f(x)$ в точці x_o і позначають $f'(x_o)$ або y' (читається еф штрих від x_o або y штрих).

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_o називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу при умові, що приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує, тобто

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Приклад 1. Знайдіть похідну функції $f(x) = 3x^2 + 2$ в точці x_o.

Розв'язання

Знайдемо приріст функції:

$$\Delta f = f(x_o + \Delta x) - f(x_o) = 3(x_o + \Delta x)^2 + 2 - 3x_0^2 - 2 =$$

$$= 3x_0^2 + 6x_o\Delta x + 3\Delta x^2 + 2 - 3x_0^2 - 2 = 6x_o\Delta x + 3\Delta x^2 = \Delta x(6x_o + 3\Delta x).$$

Знайдемо відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x(6x_0 + 3\Delta x)}{\Delta x} = 6x_0 + 3\Delta x.$$

Знайдемо похідну даної функції в точці x_0:

$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6x_0 + 3\Delta x) = 6x_o + 3 \cdot 0 = 6x_o.$$

Відповідь: $6x_o$.

Механічний зміст похідної.

Ми розглядали задачу про знаходження миттєвої швидкості прямолінійного руху матеріальної точки. Порівнюючи одержані результати з означенням похідної, можна зробити висновок: якщо матеріальна точка рухається прямолінійно і її координата змінюється по закону $s = s(t)$, то швидкість її руху $v(t)$ в момент часу t дорівнює похідній $s'(t)$:

$$v(t) = s'(t).$$

Геометричний зміст похідної.

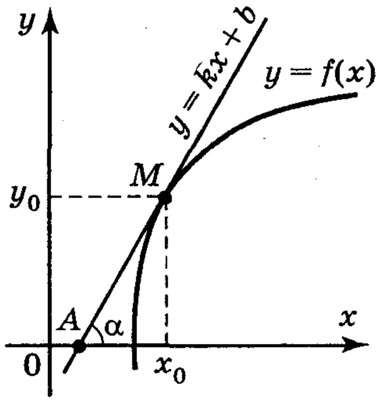


Рис. 27

Ми розглядали задачу про знаходження кутового коефіцієнта дотичної. Порівнюючи одержані результати з означенням похідної, можна зробити висновок: значення похідної функції $y = f(x)$ в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0: $f'(x_0) = k = \text{tg}\,\alpha$ (рис. 27)

Таблиця похідних

Ми вже дізнались, що похідна лінійної функції $y = kx + b$ дорівнює k, тобто

$(kx + b)' = k = tga.$

Якщо покласти $k = 0$, $b = C$, де C — довільна постійна, то одержимо, що $\boxed{C' = 0}$, тобто похідна постійної функції дорівнює 0. Якщо у формулі $(kx + b)' = k$ покласти $k = 1$, $b = 0$, то одержимо $\boxed{x' = 1}$.

А як же знайти похідну функції $y = x^2$? Підемо по плану!!!

Знайдемо похідну цієї функції, для цього зафіксуємо значення аргументу x і надамо йому приросту Δx, тоді:

1) $\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2$

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$

3) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0$ *тобто 2x.*

В загальному випадку формула матиме наступний вигляд. $\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$, $\boxed{\text{де } n \in N}$.

За даним алгоритмом знаходяться похідні всіх елементарних функцій. Робити це кожен раз не потрібно, тому що зробивши це один раз, похідні елементарних функцій можна занотувати до таблиці похідних і нею надалі користуватися.

ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ ДЕЯКИХ ФУНКЦІЙ

Функция f	Похідна f
k (стала)	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
a^x	$a^x\mathrm{Ina}$
e^x	e^x
$\log^2 x$	$\frac{1}{x\mathrm{Ina}}$
Inx	$\frac{1}{x}$

- До речі, якщо деяка функція $f(x)$ має похідну в точці x_0, то функцію називають **диференційованою в точці x_0**.

- Якщо функція $f(x)$ має похідну в кожній точці своєї області визначення $D(f)$, то її називають **диференційованою функцією**.

- Сам процес знаходження похідної називають **диференціюванням**.

А тепер розв'яжемо завдання на знаходження похідних.

№19.2 Знайдіть похідну функції:

1. $y = x^4$
   $y` = 4x^{4-1} = 4x^3$ *(використали формулу* $\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$ *)*
2. $y = x^{-15}$
   $y` = -15x^{-15-1} = -15x^{-16}$
3. $y = \frac{1}{x^{17}} = x^{-17}$
   $y` = -17x^{-17-1} = -17x^{-18} = -\frac{17}{x^{18}}$
4. $y = x^{\frac{1}{5}}$
   $y` = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5x^{\frac{4}{5}}}$ *використали властивості степеня від'ємним показником:* $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

№19.4 Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0

1. $f(x) = \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{6}$
   $f'(x) = \cos x$
   $$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
2. $f(x) = x^{-2}, \quad x_0 = -2$
   $$f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$
   $$f'(x) = -\frac{2}{(-2)^3} = -\frac{2}{-8} = \frac{1}{4}$$

№19.6 Продиференціюйте функцію:

1. $y = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$
   використсали властивості степеня з раціональним показником: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
   $y' = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$
2. $y = \sqrt[8]{x^7} = x^{\frac{7}{8}}$
   $y' = \frac{7}{8}x^{\frac{7}{8}-1} = \frac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}} = \frac{7}{8\sqrt[8]{x}}$
3. $y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$
   $y' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$
4. $y = \frac{1}{\sqrt[8]{x^5}} = x^{-\frac{5}{8}}$
   $y' = -\frac{5}{8}x^{-\frac{5}{8}-1} = -\frac{5}{8}x^{-\frac{13}{8}} = -\frac{5}{8\sqrt[8]{x^{13}}} = -\frac{5}{8x\sqrt[8]{x^5}}$

Домашнє завдання: опрацювати § 3 п.18 та п.19 та виконати завдання №19.3; №19.5; №19.7